

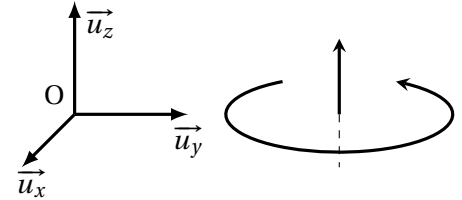
O2 : Mémento - systèmes de coordonnées

I Coordonnées cartésiennes

Définition – Repère, base cartésiennes

Le repère cartésien est orthonormé : les vecteurs de sa base sont orthogonaux entre eux et possèdent la même norme. Ils forment une **base orthonormée directe** de l'espace que l'on notera $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et qu'on appellera **base cartésienne**.

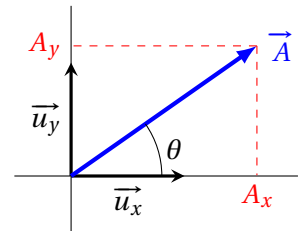
L'origine (point noté O) du référentiel et la base cartésienne forment le **repère géométrique cartésien** de l'espace, aussi appelé système de coordonnées cartésien.



Propriété – Coordonnées cartésiennes

Tout vecteur $\vec{A}$ de l'espace à trois dimensions s'exprime dans cette base à l'aide de ses **composantes cartésiennes**, notées (A_x, A_y, A_z) et vérifiant l'égalité :

$$\vec{A} = A_x \vec{u}_x + A_y \vec{u}_y + A_z \vec{u}_z$$



On obtient chaque composante par **projection** sur les vecteurs de la base :

$$\begin{cases} A_x = \vec{A} \cdot \vec{u}_x \\ A_y = \vec{A} \cdot \vec{u}_y \\ A_z = \vec{A} \cdot \vec{u}_z \end{cases}$$

si bien que on peut écrire :

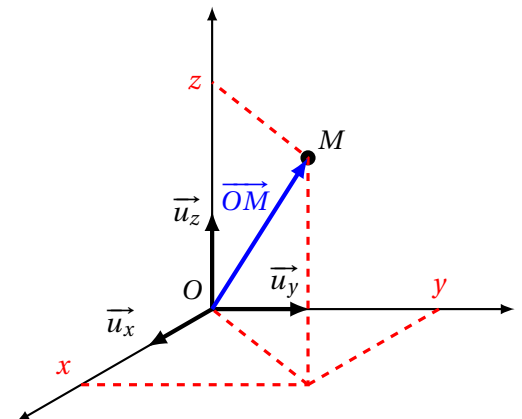
$$\vec{A} = (\vec{A} \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{A} \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\vec{A} \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$$

Propriété – Vecteurs position, vitesse, accélération en cartésiennes

• Vecteur position : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

• Vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$

• Vecteur accélération : $\vec{a}(M) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$



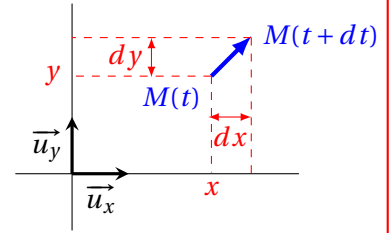
Propriété – Vecteur déplacement élémentaire, volume élémentaire

Si, durant un intervalle de temps dt infinitésimal, le point M , initialement en (x, y, z) se déplace en $(x+dx, y+dy, z+dz)$, le vecteur déplacement élémentaire est donné par

$$d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$$

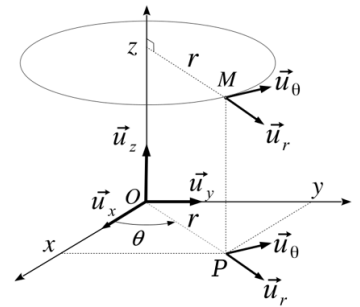
Ainsi, le volume élémentaire en cartésiennes est un parallélépipède rectangle de volume :

$$dV = dx.dy.dz$$

**II Coordonnées cylindriques****Définition – Repère, base cylindrique**

On définit la base orthonormée directe mobile cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ par :

- le vecteur $\vec{u}_r = \frac{\vec{OP}}{OP}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{OP}$ où P est le projeté orthogonal de M dans le plan Oxy .
- le vecteur $\vec{u}_\theta$ est obtenu par rotation de $\vec{u}_r$ de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique.
- le vecteur $\vec{u}_z$ est obtenu par produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

**Propriété – Coordonnées cylindriques**

Le repérage polaire consiste à repérer les points par leur distance à l'origine O du repère et par un angle mesuré par rapport à un axe fixe.

En général, on choisit l'axe (Ox) comme axe fixe et on définit :

- $r(t) = OP(t) = \|\vec{OP}(t)\|$ la **distance au centre** dans le plan Oxy
- $\theta(t) = (\vec{u}_x, \vec{OP}(t))$ l'**angle orienté** allant de $\vec{u}_x$ à $\vec{OP}$.
- z , défini de la même manière que dans les coordonnées cartésiennes.

Propriété – Dérivation temporelle des vecteurs polaires

Les dérivées temporelles des vecteurs de la base polaire sont donnés par :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{cases}$$

avec $[\dot{\theta}] = T^{-1}$. La grandeur $\dot{\theta}$ s'exprime en rad.s^{-1} et est appelée la **vitesse angulaire**.

Propriété – Vecteurs position, vitesse, accélération en cylindriques

- Vecteur position : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$
- Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z$
- Vecteur accélération : $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z$

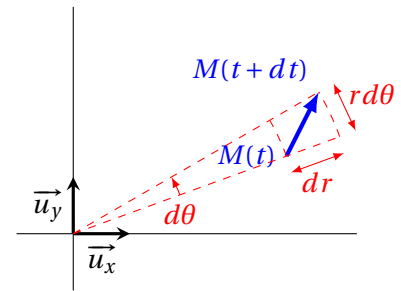
Propriété – Vecteur déplacement élémentaire, volume élémentaire

Si, durant un intervalle de temps dt infinitésimal, le point M , initialement en (r, θ, z) se déplace en $(r + dr, \theta + d\theta, z + dz)$, le vecteur déplacement élémentaire est donné par :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z$$

Ainsi, le volume élémentaire en cylindriques est donné par :

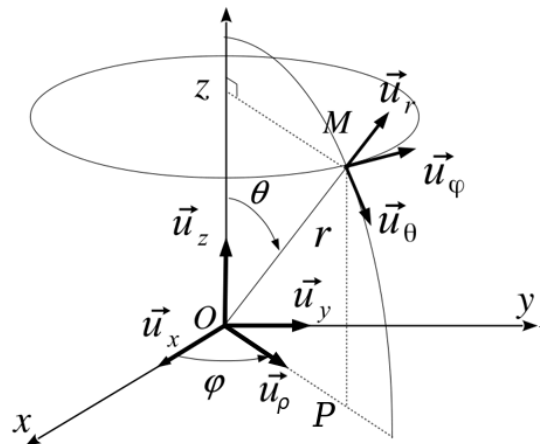
$$dV = dr.r.d\theta.dz$$

**III Coordonnées sphériques (HP)****Définition – Coordonnées sphériques**

Le repérage sphérique consiste à repérer les points par rapport à leur position sur une sphère, à l'aide d'une distance et deux angles.

En général, on choisit l'axe (Ox) comme axe fixe et on définit :

- $r(t) = OM(t) = \|\vec{OM}(t)\|$ la **distance au centre**
- $\theta(t) = (\vec{u}_z, \vec{OM}(t))$ l'**angle orienté** allant de $\vec{u}_z$ à $\vec{OM}$.
- $\varphi(t) = (\vec{u}_x, \vec{OP}(t))$ l'**angle orienté** allant de $\vec{u}_x$ à $\vec{OP}$, le projeté orthogonal de $\vec{OM}$ sur le plan Oxy .

**Propriété – Repère, base sphériques**

On définit la base orthonormée directe mobile sphérique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ par :

- le vecteur $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{OM}$ est colinéaire et de même sens que $\vec{OM}$.
- le vecteur $\vec{u}_\theta$ est obtenu par rotation de $\vec{u}_r$ de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique. dans le plan $(\vec{OM}, \vec{u}_z)$
- le vecteur $\vec{u}_\varphi$ est obtenu par produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

Remarque : $\triangle$ Bien qu'il aient le même nom, les vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont différents de ceux utilisés dans la base cylindrique

Propriété – Vecteurs position, vitesse, accélération en sphériques

- Vecteur position : $\vec{OM} = r\vec{u}_r$
- Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi$
- Vecteur accélération :

$$\vec{v} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta))\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin(\theta)\cos(\theta))\vec{u}_\theta + (r\ddot{\varphi}\sin(\theta) + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin(\theta) + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\theta))\vec{u}_\varphi$$

Propriété – Vecteur déplacement élémentaire, volume élémentaire

Si, durant un intervalle de temps dt infinitésimal, le point M , initialement en (r, θ, φ) se déplace en $(r + dr, \theta + d\theta, \varphi + d\varphi)$, le vecteur déplacement élémentaire est donné par :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi\vec{u}_\varphi$$

Ainsi, le volume élémentaire en sphériques est donné par :

$$dV = dr \cdot r d\theta \cdot r \sin(\theta) d\varphi$$

